数学史视角下等比数列的前 n 项和公式的教学

杜保营　覃淋

宜宾学院 数理学院　四川 宜宾　644000

摘　要：基于数学史的视角，设计等比数列的前 n 项和公式的教学。运用多种方式将数学史融入课堂教学。通过对历史上不同文明对等比数列的前 n 项和公式的不同推导方式的介绍，拓宽学生的视野，渗透数学文化，培养学生的核心素养，为学生营造了不一样的数学课堂，落实立德树人根本任务。

关键词：数学史；等比数列；前 n 项和；教学

一、引言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《课程标准》）在“教学建议”中明确指出，教师在发展学生数学学科核心素养过程中，要有意识地结合相应的数学教学内容，在日常教学中渗透数学文化，在教学活动中注意揭示数学的发生、发展和完善的过程[1]。美国著名数学史家 M・克莱因（Morris Kline，1908—1992）认为：“从历史上看,任何一门学科最初都是从直观的方法建立起来的，大数学家都是直观地思考问题，再用演绎的形式将知识系统化”。美国数学史家卡约里（F. Cajori，1859–1930）在《A History of Mathematics》（1926）的前言中写道：“在枯燥的计算和证明中穿插历史轶事，能极大激发学生的兴趣。……通过对数学历史的介绍，能够让学生明白：数学并不是一门呆板乏味的学科，而是一门不断进步且生动有趣的学科。”[3] 国际著名数学家与数学教育家弗赖登塔尔更是强调数学史的重要教学价值：“数学史乃是一个不断进步的系统化的学习过程。儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始。从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史。”[4]

数学史勾勒出了数学概念、符号以及定理从萌芽到成熟的曲折历程，是一幅幅数学进化图谱，将处于科学形态的数学知识变为教学形态的知识，把数学家创造数学的“火热的思考”的过程展现出来。数学史作为一种宝贵的教学资源,在理论探讨与教学实践中，都已显现其不可忽视的教育功能与文化意义。从实际应用来看，数学史所承载的价值是多维度的：它不仅展现了知识的和谐与结构之美，揭示了方法的精妙与逻辑之趣，还让学生在探索中获得发现的快乐，在思考中提升思维的能力。与此同时，它所带来的文化浸润与精神熏陶，也在潜移默化的发挥着重要的育人的作用。

《课程标准》对教材编写提出明确要求：“内容的组织要体现数学知识的内在逻辑，揭示其发生发展的过程；同时必须符合学生的认知发展规律……”[1] 通过对在职数学教师的调查发现，大部分老师都非常认同数学史的教育价值，但是在教学中却很少使用数学史，重要原因之一就是没有可供使用的数学史料，数学史在教学中“高评价、低应用”的现象普遍存在[5]。

作为等比数列内容的延续，人教 A 版选择性必修 2《数列》4.3 节聚焦前 n 项和公式的推导与应用。这一内容的核心任务在于：引导学生在探索中掌握求和公式，并最终打通其与通项公式之间的逻辑关联 [1]。教材在引入这一内容时以历史传说——国际象棋的发明为例，创设情景，作为引入。这里的内容承上启下，既是对上一节课“等比数列”内容的复习，又进一步提出了新问题，再引入求一般的等比数列的和，体现了从特殊到一般的数学思想。这样处理的优点是运用故事激发学生的学习动机,可以激发学生的学习兴趣。但创设的情境以及提出的问题对公式的推导过程没有起到作用。问题在于，推导公式两时边同时乘以 q 这一步显得突兀，导致许多学生难以背后的逻辑。

通过对求和公式的历史考察，发现早在 3000 年前的古埃及、古巴比伦就已经有等比数列求和的问题了。在欧拉的方法问世之前，面对同样的求和问题，古人会用什么方法来处理呢？实际上，对于等比数列的前 n 项和公式的推导，历史上还有很多不同的推导

作者简介：杜保营，生于 1981年，男，博士，讲师，研究方向为偏微分方程，数学教育。

覃淋，生于 1991年，男，硕士，助教，研究方向为数学史与数学教育。

方法。古代埃及、两河流域、中国、印度、希腊、伊斯兰以及中世纪欧洲数学历史文献中都有很多等比数列求和的问题。本文以等比数列的前 n 项和公式为切入点，精心设计问题链，再现前人探索该公式的多种思路。这一过程不仅还原了知识发生发展的自然轨迹，帮助学生多角度理解公式，更构建了一个温度与深度兼具的课堂环境，使数学学科德育与立德树人根本任务在文化传承中得以落实。

二、历史材料梳理

早在古巴比伦时期，就已有等比数列求和问题。古巴比伦泥板 MS1844（约公元前 2050 年）上记载如下的问题[3]：七兄弟分财产，最小的得 2，后一个比前一个多得 $\frac{7}{6}$，问所分财产共有多少？泥版的顶部赫然刻写着祭司算出的最终结果。

在古埃及的莱茵德纸草书第 79 题中，记载着一个极具代表性的问题：一座庄园里有 7 幢房子；每幢房里有 7 只猫；每只猫吃 7 只老鼠；每只老鼠吃 7 颗麦穗；每颗麦穗能产生 7 赫卡特 (古埃及计量单位) 粮食。问庄园里共有多少东西？[6] 这一连串以 7 为倍数的数字，正是今天我们所说的等比数列求和在实际生活中的最早应用之一。这一问题后来又有许多的变式，如士兵问题、妻子问题、征兵问题、城市问题等。比如城市问题：“某地方有 10 座城市，每个城市有 10 条街道，每条街道有 10 套房，每套房有 10 根柱子，每根柱子上有 10 个圆环，每个圆环拴着 10 匹马，每匹马上有 40 让，请问总共多少？”

通过考察埃及人的思路，可以知道，埃及人已然知晓等比数列的前 n 项和与前 n−1 项和之间的关系，即 $S_n=a_1+qS_{n-1}$。

由此易得 $S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}\,(q\neq 1)$。

等比数列的前 n 项和公式的推导并非这一种，欧几里得在《几何原本》中展示不同的智慧[7]：假设 $\{a_n\}$ 为等比数列，各项分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,a_{n+1}$，公比为 $q(\neq 1)$，根据等比数列的定义，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_2}{a_1}=q$，得到 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1}=q-1$，利用等比定理，有：

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1}=\frac{a_{n+1}-a_1}{S_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}=q-1$$

整理，得 $S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}\,(q\neq 1)$。

中国古代许多数学文献中也有等比数列的求和问题，《九章算术》“衰分”章问题 2：“今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗。羊主曰：‘我羊食半马’，马主曰：‘我马食半牛’。今欲衰偿之，问各出几何？”《张丘建算经》（约公元 5 世纪）：“今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里。问日行几何？” 元代数学家朱世杰的《算学启蒙》（1299）：“今有银一秤一斤十两，令甲、乙、丙从上折半差分之，问各得几何？”明代程大位的著作《算法统宗》（1593）中有许多以诗歌形式来表达的等比数列求和问题，如浮屠增级歌[8]：远望巍巍塔七层，红灯点点倍加增。共灯三百八十一，请问尖头灯几盏？这是一个已知项数、前 7 项和、公比，求首项的问题。书中也没有给出等比数列求和公式，而是运用比例方法来求解。如上题，从塔尖往下，各层的灯的数量构成比例 1 ∶ 2 ∶ 4 ∶ 8 ∶ 16 ∶ 32 ∶ 64，可求得各层灯的数量依次为 $\frac{1\times 381}{127}$，$\frac{2\times 381}{127}$，$\frac{4\times 381}{127}$，$\frac{8\times 381}{127}$，$\frac{16\times 381}{127}$，$\frac{32\times 381}{127}$，$\frac{64\times 381}{127}$，这里 1+2+4+8+16+32+64=127。整理即可得到各层灯的数量分别为 3、6、12、24、48、96、192。这些问题都可以设置为例题或习题，再让学生用等比数列的前 n 项和公式来解答，让学生体会古今数学方法的异同。

印度数学对等比数列求和问题的讨论最早见于吠陀梵文文献，虽然印度部分数学家提出了求和公式，但推导过程已无从考证。摩诃毗罗在《计算方法纲要》给出了公式 $S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}(q\neq 1)$ [9]，摩诃毗罗的《计算方法纲要》中有如下问题：有人第一天在某地得 2 枚金币，此后每到一个新地方，所得金币数量均为前一天的 3 倍，问 8 天总共得到多少？

婆什迦罗的《莉拉沃蒂》有类似问题[10]：如有一个人第一天施舍给僧人 2 子安贝，之后每天施舍的数量翻倍，持续一月，问总共多少？

英国数学家阿尔昆（Alcuin，735–804）的《敏锐青年之命题》有征兵问题，相当于求一个首项为 1，公比为 2 的等比数列的前 30 项的和。

阿拉伯数学家阿尔 · 比鲁尼（Al–Biruni，973–1055）的著作中有著名的棋盘问题。这就是人教 A 版教材中给出的象棋问题，此后，这一问题及其各种变式在欧洲初等数学著作中频频出现。比如帕乔里（Luca Pacioli，1445—1517）的《概要》、卡尔达诺（Gerolamo Cardano，1501—1576）《实用算术》、克拉维斯（Clavius，1538—1612）《实用算术概要》等。

伊本·艾兹拉（Rabbi ibn Ezra，1090—1167）在《数之书》中给出公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$，但并未给出证明 [11]。伊斯兰数学家阿尔·卡西（Jamshid al-Kashi，1380-1429）在《算术之钥》给出等比数列的前 n 项和公式 $a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{a^n-a}{a-1}+a^n(a\neq 1)$，也没有对公式进行证明。

斐波拉契的《计算之书》中载有许多等比数列求和的问题，如前面提到的“7 个老翁去罗马”的问题。意大利数学家贝尔达曼迪（Beldamandi, 1370-1428）在《整数算法》（1410）中给出等比数列的求和公式 [1]。法国数学家许凯在著作《算学三部》（1484）中同样给出了相似的公式。法国另一位数学家斯蒂菲尔（Michael Stifel, 1487—1567）在《整数算术》（1544）中给出了等比数列的前 n 项求和公式，意大利著名数学家塔尔塔利亚在其著作《数量通论》（1556）给出了一样的公式。当时的著作依赖文字描述数学公式，以《实用算术概要》为例：取末项与首项之差，除以公比与 1 的差，所得结果再与末项相加 [12]。

17 世纪时，英国数学家沃利斯（J. Wallis，1616—1703）在其著作《统一的数学》（1695）采用了符号语言表述 [13]。但关于公式的推导仍付之阙如。

18 世纪，瑞士大数学家欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）在《代数学基础》（1774）中，首次采用了如今高中数学教材中通用的错位相减法。值得注意的是，欧拉当年并没有进行严格的推导，而是从具体的等比数列：$1,2,2^2,\cdots,2^n$，$1,3,3^2,\cdots,3^n$，通过观察、类比的方式得到等比数列的和 [14]。

19 世纪初，法国数学家拉克罗瓦（S. F. Lacroix，1765-1843）在其著作《代数学基础》（1804）中给出一种名为“掐头去尾”的方法：由 $S_n-a_1=a_2+a_3+\cdots+a_n=q(a_1=a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$；另一方面，$S_n-a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，所以 $S_n-a_n=q(S_n-a_n)$，经过简单的变形，我们就可以得到等比数列求和公式 [15]。

19 世纪，英国数学家华里司（W·Wallace，1768—1843）在《大英百科全书》中的词条中采用了错位相减法 [16]。

三、教学实施

（一）呈现问题

为帮助学生自然过渡到新课，可以先回顾等差数列的相关内容和等比数列的通项公式。随后，呈现历史名题——妻子问题：我去伊夫斯圣地，路上碰见一男携七妻子，每个妻背负七个袋子，每个袋子都装有七只猫，每只猫生七只猫，总共多少？

在学生利用逐项求和的方法解决问题后，教师不妨用 PPT 呈现“棋盘问题”，并启发提问：“如果沿用刚才的方法，你能否算出棋盘上的麦粒数量？”

在学生分组讨论的过程中，教师适时播放微视频，带领学生穿越时空，了解等比数列求和问题的演变历程，让那些跨越千年的经典问题走进课堂。

（二）合作探究

先借助微视频项学生呈现等比数列求和公式的几种推导方向。然后组织学生分组展开合作探究。讨论结束后，请各组代表依次讲解本组的推导方法。

小组一：古埃及人的方法之一

学生从定义出发，建立等比数列前 n 项和与前 n-1 项和的关系，思路如下：

由于 $S_n=a_1+qS_{n-1}=a_1+q(S_n-a_n)=a_1+q(S_n-a_1q^{n-1})$，整理得到 $S_n-qS_{n-1}=a_1-a_nq$，所以 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$。

小组二：古埃及人的方法之二

学生从等比数列的定义出发，找到前 n+1 项和与前 n 项和之间的关系，思路如下：

由于 $S_{n+1}=a_1+qS_n$，另外 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$，就有 $S_n+a_{n+1}=a_1+qS_n$，所以 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$。

小组三：错位相减法

利用错位相减法推导出公式，先举了几个具体实例，然后得出结论。学生的思路如下：

$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}$

$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}$

两式相减得 $(q-1)S_n=a_1q^n-a_1$，从而当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}$。

小组四：等比定理法之一

基于定义，运用用比例的合比性质推导出等比数列的求和公式，思路如下：

因为：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$

得到：

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

从而有：$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1}=\frac{a_{n+1}-a_1}{S_n}=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1}=q-1$

整理，得：$S_n=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}\ (q\neq 1)$。

小组五：等比定理法之二

学生基于定义，再结合《几何原本》中的等比定律，思路如下：

由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=q$

根据等比定理有：$\dfrac{a_{n+1}+a_n+\cdots+a_2}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1}=q$

即 $\dfrac{a_{n+1}+S_n-a_1}{S_n}=q$

整理得到 $S_n=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}\ (q\neq 1)$。

小组六：掐头去尾法

先对 $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$“掐头”，得到等式 $S_n-a_1=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$；接着“去尾”，有等式 $S_n-a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，主要的推导步骤如下：由 $S_n-a_1=a_2+a_3+\cdots+a_n=q(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$；故 $S_n-a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$，所以 $S_n-a_1=q(S_n-a_n)$，得到 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$。

小组七：首项提取法

由等比数列定义，先对等式 $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$ 进行变形，得到 $S_n=a_1(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})$；再根据恒等式 $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})=1-q^n$ 便可以得到求和公式，主要推导步骤如下：由 $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})$，故有等式 $(1-q)S_n=a_1(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})(1-q)=a_1(1-q^n)$，得到公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$。

小组八：等比定理法之三

从定义出发，运用等比定理即可推导出公式，主要推导步骤如下：

由 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=q$

根据等比定理有 $\dfrac{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2}{a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1}=q$

即 $\dfrac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$

整理得到：$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}\ (q\neq 1)$

小组九：恒等式法

根据恒等式：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$

因为 $S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$，将恒等式代入即可得到公式。

（三）总结规律

在总结环节，对各小组的探究进行梳理与完善。大致可以分为 4 类。源于古埃及的探索，小组一借鉴古埃及人的原始思路，小组二在次基础上作了改进，小组七的方法同样是在古埃及方法的启发下获得的。经典方法再现，小组三的方法与错位相减法不谋而合，体现了从特殊到一般的归纳思想。小组四则回溯到《几何原本》中的经典方法，小组五对其进行了优化，使推导过程更为简洁。巧妙的“掐头去尾”，小组六采用了拉克罗瓦在《代数学基础》中的推导方法。而小组十的方法则可以清楚看到“，这种方法实际上源自《几何原本》的思路。殊途同归的优化，小组九运用的恒等式法和小组七的类似，但在推导的简洁性上更胜一筹。

（四）应用规律

公式推导后，让学生返回来解决课前提及的棋盘问题，使教学环节前后呼应、浑然一体。

$$S_{64}=1+2^1+2^2+\cdots+2^{63}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$$

随后安排针对性的练习，让学生在解决问题的过程中，亲身感受数学的应用价值。

问题 1 远望巍巍塔七层，红灯点点倍加增。共灯三百八十一，请问尖头灯几盏？（程大位《算法统宗》）

问题 2 今有女善织，日自倍，五日织五尺。问日织几何？（《九章算术》）

问题 3 七兄弟分财产，最小的得 2，后一个比前一个多 $\dfrac{1}{6}$，问所分财产共有多少？

（五）课堂总结

本节课的教学设计，旨在引导学生追寻历史的足迹建构知识。从巴比伦财产分配，到古埃及的朴素探索，从《几何原本》的几何推演，到印度数学家的代数表述，从中世纪欧洲的文字描述，到欧拉笔下经典的错位相减法，每一种方法都闪耀着不同时代数学家的智慧。在追本溯源的过程中，学生不仅理解了公式本身，更体悟了特殊到一般、方程、分类讨论等数学思想方法的内涵，其逻辑推理、数学运算、直观想象、数学建模等核心素养也在潜移默化中得到提升。

四、结语

本节课主要采用了复制式、顺应式的方式来将数学史融入课堂教学中。首先是复制式，利用了古代许多数学著作中的“历史数学名题”，比如“分财产”问题、“猫鼠”问题等，都属于复制数学问题。在公

式的推导过程中，古埃及人的方法、《几何原本》中的方法、法国数学家拉克罗瓦的方法、欧拉的错位相减法，都是复制历史上的数学思想方法。其次是顺应式，在公式推导过程中，对古埃及人的方法进行改进，使得公式的推导更为简单，更加适合学生的学习，符合学生的数学认知结构，但所蕴含的数学思想方法没有改变。实际上，除了《几何原本》中的推导方法外，其它方法都蕴含着方程思想，在公式的推导的过程中，潜移默化地渗透了数学思想方法。

如何让“错位相减法”这一技巧性较强的方法，不以突兀的形式出现在学生面前？本节课以数学史为切入点，设计教学，取 得了多维度的教育成效。化技巧为自然，彰显知识之谐，从学生已有认知出发，借助历史情境引发认知冲突，使公式的生成睡到渠成，知识建构自然和谐。融古今以比较，呈现方法之美，通过对比不同时期的推导方法，让学生在历史变迁中感受数学思维的多样性与精妙，当学生将自己的方法与古埃及人、欧几里得、欧拉的方法相遇，他们看到的不仅是工具的更迭，更是思维方式的交响与共鸣。历探究而体悟，享探究之乐，为学生提供自主探究的机会，让他们字历史问题的引领下体验发现的乐趣。用故事载信纸，达成能力之助，将公式应用融入历史故事，在解决问题的过程中培养学生学以致用的能力。跨文明以观照，彰显文化之魅，介绍不同文化背景下的等比数列求和问题，拓宽学生的多元文化视野，实现数学文化的浸润，数学不再是冰冷的符号。继往圣以开来，落实德育之效，展现历代数学家的智慧传承，培养学生的理性精神、独立思考与创新意识。这四重价值的实现，有赖于数学史在历史与现实、数学与人文、数学与科学之间架起了三座桥梁，恢复了数学公式背后的人文精神，彰显了数学背后的人性，有助于提升学生对数学的兴趣，有助于培养学生积极的情感态度和价值观。

参考文献：

[1] 教育部．普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订)[S]．北京：人民教育出版社，2020.

[2] M. Kline．Logic versus pedagogy [J]．American Mathematical Monthly，1970，77(3)：264−282.

[3] F.Cajori．A History of Mathematics [M]．New York：The Macmillan Company，1926：2−3.

[4] H.Freudenthal．Major problems of mathematics education [J]．Educational Studies in Mathematics，1981(5)：133−150.

[5] 覃淋，姚芳．数学史与数学教育研究现状及展望 [J]．首都师范大学学报 (自然科学版)，2018，39(3)：9−15.

[6] 卡茨．数学史通论 [M]．北京：高等教育出版社，2004.

[7] 欧几里得．几何原本 [M]．南京：译林出版社，2014.

[8] 郭世荣. 算法统宗导读 [M]. 武汉：湖北教育出版社，2000.

[9] A. N. Singh．On the use of series in Hindu mathematics [J]．Osiris，1936：606−628.

[10] 婆什伽罗．莉拉沃蒂 [M]．北京：科学出版社，2008.

[11] O. Terquem．Notice sur un manuscript H é breu du trait é tique d’Ibn Esra, conserve a la biblioth è que royale [J]．Journal de Mathematiques Pures et Appliqu é es，1841(6)：275−296.

[12] C. Clavius．Epitome Arithneticae Practicae [M]．Romae：Typographia Dominici Basae，1583.

[13] J. Wallis．Opera Mathematica (Vol. 1) [M]．Oxoniae：E. Theateo Sheldoniano，1695.

[14] L.Euler．Elements of Algebra [M]．London：Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co，1822.

[15] S. F. Lacroix．Él é mens d’Alg è bre [M]．Paris：Mme Ve Courcier，1812.

[16] W. Wallace. Algebra. [M]// Encyclopaedia Britannica. 6th ed. Edinburgh：Archibald Constable & Company , (Vol. 1)，1823：617−619.